UNIVERSITE DE TUNIS
ECOLE SUPERIEURE DES SCIENCES
ECONOMIQUES ET COMMERCIALES
DE TUNIS

EXAMEN DE RECHERCHE OPÉRATIONNELLE
($3^{ème}$ *FIN*)
Session principale (Mai 2014)
AUCUN DOCUMENT N'EST AUTORISÉ
DUREE : 2 HEURES
CET EXAMEN CONTIENT DEUX PAGES

Exercice 1

Un industriel veut produire un alliage Z à 30% de plomb, 30% de zinc et 40% d'étain. Supposons qu'il puisse se procurer sur le marché des alliages A, B, C, D, E, F, G, H, I dont les compositions et les prix respectifs sont donnés dans le tableau suivant :

Compositions des alliages (en %)	A	B	C	D	E	F	G	H	I	Alliage à fabriquer
Plomb	10	10	40	60	30	30	30	50	20	30
Zinc	10	30	50	30	30	40	20	40	30	30
Etain	80	60	10	10	40	30	50	10	50	40
Coût au Kilo	4.1	4.3	5.8	6	7.6	7.5	7.3	6.9	7.3	

Ecrire le programme linéaire qui permet de déterminer le besoin de chaque alliage A, B, C, D, E, F, G, H et I pour obtenir au prix de revient minimum un 1 Kg de l'alliage Z.

Exercice 2

Une entreprise désire effectuer une campagne publicitaire dans la télévision, la radio et les journaux pour un produit lancé récemment sur le marché. Le but de la campagne est d'attirer le maximum possible de clients. Les résultats d'une étude de marché sont donnés par le tableau suivant :

	Télévision		Radio	Journaux
	Locale	Par satellite		
Coût d'une publicité	40 DT	75 DT	30 DT	15 DT
Nombre de client potentiel par publicité	400	900	500	200
Nombre de client potentiel femme par publicité	300	400	200	100

Pour la campagne, on prévoit de ne pas payer plus que 800DT pour toute la campagne et on demande que ces objectifs soient atteints :

1. Au minimum 2000 femmes regardent, entendent ou lisent la publicité ;
2. La campagne publicitaire dans la télévision ne doit pas dépasser 500 DT ;
3. Au moins 3 spots publicitaires seront assurés par la télévision locale et au moins de deux spots par la télévision par satellite.
4. Le nombre des publicités dans la radio ou dans les journaux est pour chacun entre 5 et 10.

Ecrire le programme linéaire qui permet de déterminer le nombre de spots publicitaires optimal.

Exercice 3

Résoudre graphiquement ces programmes linéaires :

1)

$$
\begin{array}{ll}
Max & 100x_1 + 200x_2 \\
s.c. & x_1 + x_2 \le 150 \\
& 4x_1 + 2x_2 \le 440 \\
& x_1 + 4x_2 \le 480 \\
& x_1 \qquad \le 90 \\
& x_1 \ge 0, x_2 \ge 0
\end{array}
$$

2)

$$
\begin{array}{ll}
Max & -2x_1 + 3x_2 \\
s.c. & x_1 \le 5 \\
& 2x_1 - 3x_2 \le 6 \\
& x_1 \ge 0, x_2 \ge 0
\end{array}
$$

3)

$$
\begin{array}{ll}
Min & 3x_1 + 2x_2 \\
s.c. & x_1 + 2x_2 \le 2 \\
& 2x_1 + 4x_2 \ge 8 \\
& x_1 \ge 0, x_2 \ge 0
\end{array}
$$

4)

$$
\begin{array}{ll}
Max & x_1 + 3x_2 \\
s.c. & 2x_1 + 6x_2 \le 30 \\
& x_1 \le 10 \\
& x_2 \le 4 \\
& x_1 \ge 0, x_2 \ge 0
\end{array}
$$

5)

$$
\begin{array}{ll}
Max & x_1 + x_2 \\
s.c. & 3x_1 + 2x_2 \le 40 \\
& x_1 \le 10 \\
& x_2 \le 5 \\
& x_1 \ge 0, x_2 \ge 0
\end{array}
$$

UNIVERSITE DE TUNIS
ECOLE SUPERIEURE DES SCIENCES
ECONOMIQUES ET COMMERCIALES
DE TUNIS

CORRECTION EXAMEN DE RECHERCHE OPÉRATIONNELLE
($3^{ème}$ FIN)
Session principale (Mai 2014)

Exercice 1 **(6 points)**

La décision à prendre : Combien acheter de chaque alliage A, B, …, I ?

Les variables de décision sont :
- x_i : la quantité d'alliage i, i= A, B, …, I, à acheter. 1

$x_A \geq 0,\ x_B \geq 0, x_C \geq 0,\ x_D \geq 0, x_E \geq 0,\ x_F \geq 0, x_G \geq 0,\ x_H \geq 0, x_I \geq 0$.

Les contraintes relatives au problème sont :
- Equation de la conservation de la matière : 1
$$x_A \geq 0,\ x_B \geq 0, x_C \geq 0,\ x_D \geq 0, x_E \geq 0,\ x_F \geq 0, x_G \geq 0,\ x_H \geq 0, x_I \geq 0$$
- Equation de la satisfaction des proportions en Plomb :
$$x_A + 0.3\,x_B + 0.5\,x_C + 0.3\,x_D + 0.3\,x_E + 0.4\,x_F + 0.2\,x_G + 0.4\,x_H + 0.3\ x_I = 0.3$$ 1
- Equation de la satisfaction des proportions en Zinc :
$$0.1\,x_A + 0.3\,x_B + 0.5\,x_C + 0.3\,x_D + 0.3\,x_E + 0.4\,x_F + 0.2\,x_G + 0.4\,x_H + 0.3\,x_I = 0.3$$ 1
- Equation de la satisfaction des proportions en Etain :
$$0.8\,x_A + 0.6\,x_B + 0.1\,x_C + 0.1\,x_D + 0.4\,x_E + 0.3\,x_F + 0.5\,x_G + 0.1\,x_H + 0.5\,x_I = 0.4$$ 1

La fonction objectif dans cet exemple représente le coût d'achat des différents alliages :

$$\cancel{Max}\ Min\ z = 4.1\,x_A + 4.3\,x_B + 5.8\,x_C + 6\,x_D + 7.6\,x_E + 7.5\,x_F + 7.3\,x_G + 6.9\,x_H + 7.3\,x_I$$ 1

Le programme linéaire qui modélise ce problème mélange s'écrit :

$$\begin{array}{ll}
Min & 4.1\,x_A + 4.3\,x_B + 5.8\,x_C + 6\,x_D + 7.6\,x_E + 7.5\,x_F + 7.3\,x_G + 6.9\,x_H + 7.3\,x_I \\
s.c. & x_A + x_B + x_C + x_D + x_E + x_F + x_G + x_H + x_I = 1 \\
 & 0.1\,x_A + 0.1\,x_B + 0.4\,x_C + 0.6\,x_D + 0.3\,x_E + 0.3\,x_F + 0.3\,x_G + 0.5\,x_H + 0.2\,x_I = 0.3 \\
 & 0.1\,x_A + 0.3\,x_B + 0.5\,x_C + 0.3\,x_D + 0.3\,x_E + 0.4\,x_F + 0.2\,x_G + 0.4\,x_H + 0.3\,x_I = 0.3 \\
 & 0.8\,x_A + 0.6\,x_B + 0.1\,x_C + 0.1\,x_D + 0.4\,x_E + 0.3\,x_F + 0.5\,x_G + 0.1\,x_H + 0.5\,x_I = 0.4 \\
 & x_A, x_B, x_C, x_D, x_E, x_F x_G, x_H, x_I \geq 0
\end{array}$$

Exercice 2 **(6 points)**

Les variables de décision du problème sont
- x_1 : le nombre de spots publicitaires dans la télévision locale
- x_2 : le nombre de spots publicitaires dans la télévision par satellite 1
- x_3 : le nombre de spots publicitaires dans la radio
- x_4 : le nombre d'affiches publicitaires dans les journaux

Les contraintes de non-négativité sont vérifiées.

Les contraintes du problème sont :

- Coût total de la compagne publicitaire : $40x_1 + 75x_2 + 30x_3 + 15x_4 \leq 800$ 1
- Nombre de clients femmes potentiels par publicité :
$$300x_1 + 400x_2 + 200x_3 + 100x_4 \geq 2000$$ 1
- Contraintes de la télévision : $40x_1 + 75x_2 \leq 500$, $x_1 \geq 3$ et $x_2 \geq 2$ 1
- Contraintes sur le nombre de publicités dans la radio et dans les journaux $5 \leq x_3 \leq 10$ et $5 \leq x_4 \leq 10$. 1

La fonction objectif à maximiser représente le nombre de clients potentiels par publicité $z = 400\,x_1 + 900\,x_2 + 500\,x_3 + 200\,x_4$. 1

Le programme linéaire résultant est :

$$
\begin{array}{lllllll}
Max & 400\,x_1 + 900\,x_2 + 500\,x_3 + 200\,x_4 \\
s.c. & 40x_1 + 75\,x_2 + 30x_3 + 15x_4 \leq 800 \\
 & 30x_1 + 40x_2 + 20x_3 + 10x_4 \geq 2000 \\
 & 40x_1 + 75\,x_2 \leq 500 \\
 & x_1 \geq 3 \\
 & x_2 \geq 2 \\
 & x_3 \geq 5 \\
 & x_3 \leq 10 \\
 & x_4 \geq 5 \\
 & x_4 \leq 10 \\
 & x_1 \geq 0,\; x_2 \geq 0, x_3 \geq 0,\; x_4 \geq 0
\end{array}
$$

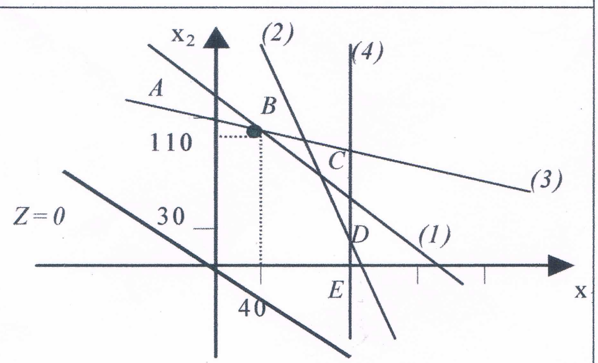
$300x_1 + 400x_2 + 200x_3 + 100x_4$

Exercice 3 **(10 points)**

Problème de maximisation

$$
\begin{array}{lll}
Max & 100x_1 + 200x_2 & \\
s.c. & x_1 + x_2 \leq 150 & (1) \\
 & 4x_1 + 2x_2 \leq 440 & (2) \\
 & x_1 + 4x_2 \leq 480 & (3) \\
 & x_1 \qquad \leq 90 & (4) \\
 & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 &
\end{array}
$$

2

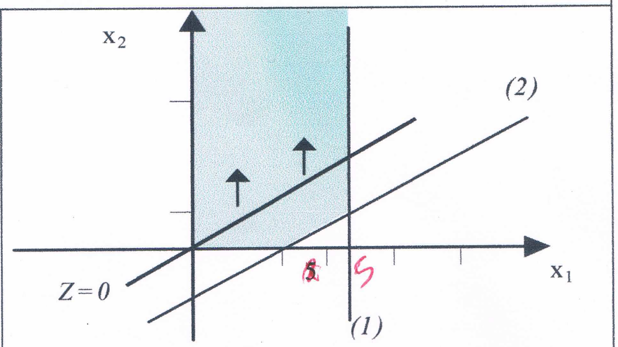


la solution optimale est B(40,110)

Problème avec solution non bornée

$$
\begin{array}{lll}
Max & -2x_1+3x_2 & \\
s.c. & x_1 \le 5 & (1) \\
 & 2x_1-3x_2 \le 6 & (2) \\
 & x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 &
\end{array}
$$

2

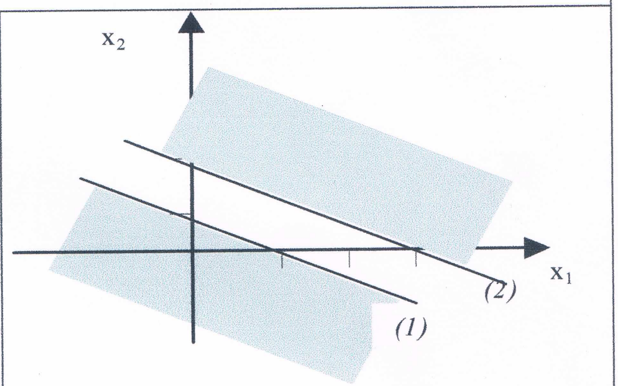


On peut augmenter la valeur de la fonction objectif dans la direction des flèches indéfiniment donc la solution est non bornée

Problème impossible

$$
\begin{array}{lll}
Min & 3x_1+2x_2 & \\
s.c. & x_1+2x_2 \le 2 & (1) \\
 & 2x_1+4x_2 \ge 8 & (2) \\
 & x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 &
\end{array}
$$

2



L'espace des solutions réalisables est vide, il est l'intersection des deux zones grises de la figure ci-dessus

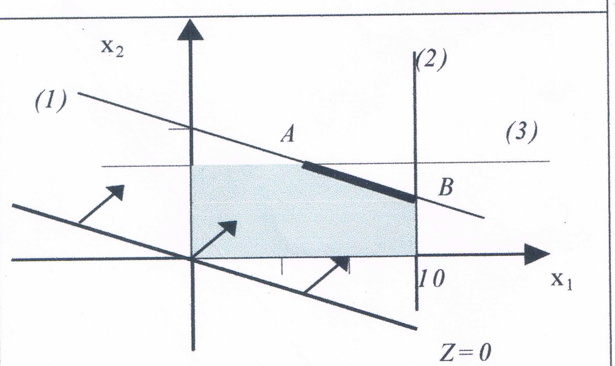
Problème à solutions multiples

$$
\begin{array}{lll}
Max & x_1+3x_2 & \\
s.c. & 2x_1+6x_2 \le 30 & (1) \\
 & x_1 \le 10 & (2) \\
 & x_2 \le 4 & (3) \\
 & x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 &
\end{array}
$$

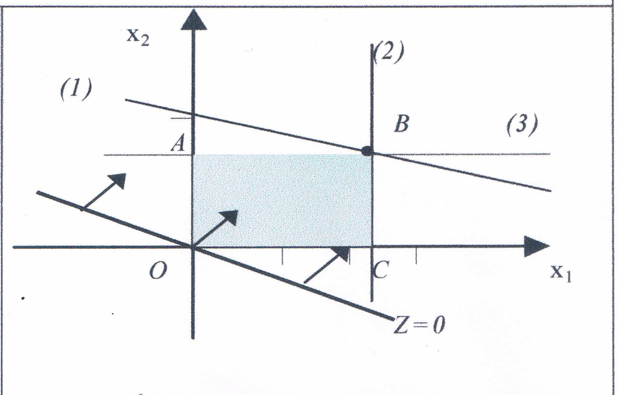
2

$x_2^* = 4$

$(10, \frac{10}{6})$ $z^* = 15$ $x_1^* = 3$



L'ensemble des points décrit par le segment [AB] représente les solutions optimales du problème linéaire

Problème de dégénerescence	
$\begin{array}{lll} Max & x_1 + x_2 & \\ s.c. & 3x_1 + 2x_2 \leq 40 & (1) \\ & x_1 \leq 10 & (2) \\ & x_2 \leq 5 & (3) \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 & \end{array}$ 2	
La solution optimale B(10,5) est dite dégénérée si trois contraintes concourent en ce point. $Z^* = 15$	